**国际地理信息系统杂志**

**ISSN：0269-3798（打印）（在线）期刊主页： [http](https://translate.google.com/translate?hl=zh-CN&prev=_t&sl=en&tl=zh-CN&u=http://www.tandfonline.com/loi/tgis19) ：//www.tandfonline.com/loi/tgis19**

**点集拓扑空间关系**

**MAX J. EGENHOFER和ROBERT D. FRANZOSA**

**引用本文：** MAX J. EGENHOFER和ROBERT D. FRANZOSA（1991）Point-set拓扑

空间关系，国际地理信息系统杂志，5：2,161-174，DOI：

[10.1080 / 02693799108927841](https://translate.google.com/translate?hl=zh-CN&prev=_t&sl=en&tl=zh-CN&u=http://www.tandfonline.com/action/showCitFormats?doi=10.1080/02693799108927841)

**要链接到这篇文章：** [https](https://translate.google.com/translate?hl=zh-CN&prev=_t&sl=en&tl=zh-CN&u=https://doi.org/10.1080/02693799108927841) **：** [//doi.org/10.1080/02693799108927841](https://translate.google.com/translate?hl=zh-CN&prev=_t&sl=en&tl=zh-CN&u=https://doi.org/10.1080/02693799108927841)

文章点击：6768

[引用文章：587查看引用文章](https://translate.google.com/translate?hl=zh-CN&prev=_t&sl=en&tl=zh-CN&u=http://www.tandfonline.com/doi/citedby/10.1080/02693799108927841%23tabModule" \l "tabModule)

INT。 J.地理信息系统， 1991， VOL。 5，不。 2,161-174

点集拓扑空间关系

MAX J. EGENHOFER

国家地理信息与分析中心

测量工程系， 107 Boardman Hall，

缅因州大学，奥罗诺，缅因州04469，美国

和ROBERT D. FRANZOSA

内维尔大学 417 数学系 ，

缅因州大学，奥罗诺，缅因州04469，美国

正文：

摘要：地理信息系统（GIS）的实际需求导致了这一需求

研究描述空间关系的**形式化和健全的方法（formal and sound method）**。摘要在介绍拓扑学基本概念的基础上，提出了**一种新的**集间拓扑空间关系**理论(a novel theory,新理论)**，该理论将集间拓扑空间关系定义为两个集的边界和内部交叉点的**交集（intersections）**。 通过考虑交集的空与非空关系，给出了总共十六种的拓扑空间关系，每个拓扑空间关系都可以在**R2**中实现*。*如果集合仅限于空间区域，则该集合被缩减为9个关系，空间区域是连接拓扑空间的子集的一个相当广泛的类别，并应用于GIS。结果表明，这些关系在**内部的平等，不相交和包含（equality, disjointness and containment in the interior ）**等关系上与某些标准集合理论、拓扑空间关系相对应。

**1. 简介Introduction**

这里报告工作的动机是对地理信息系统（GIS）领域内空间关系的正式理解的**实际需要（practical need）**。 为了显示，处理或分析（display, process or analyze ）空间信息，用户通过**询问查询语句**（asking queries）从GIS中选择数据。几乎所有GIS查询语句都基于空间概念。 很多疑问**明确地**（explicitly）结合（incorporate）空间关系来描述关于要分析或显示的空间对象的约束（constraints）。 例如，GIS用户可能会使用以下查询语句，以获取有关特定区域的学龄儿童有毒废物堆放的潜在风险的信息：“检索位于佩诺布斯科特县小学10英里范围内的所有有毒废物堆放场 及其邻近（adjacent）的县。 信息系统已知的小学（elementary schools）的数量受制于约束条件的限制。 特别感兴趣的是由空间关系表示的空间约束，例如在10英里内，毗连。

缺乏全面的空间关系理论是任何地理信息系统实施的主要障碍。问题不仅在于为这些空间关系选择合适的术语，而且在于确定它们的语义。空间关系理论的发展可望为下列问题提供答案(Abler 1987):

•描述地理对象之间的关系需要哪些基本几何属性（fundamental geometric properties）?

•这些关系如何以基本几何性质的形式定义?

•空间关系的最小集合是什么?

除了纯粹的数学方面，认知，语言和心理

如果有一个理论，也必须包括考虑因素（Talmy 1983，Herskovits 1986）

将开发适用于现实世界问题的空间关系（NCGIA 1989）。

在本文的范围内，只有正式的，具有数学概念的

将考虑从点集拓扑部分提供 。

这种空间关系理论的应用超出了GIS的范畴。 任何

处理空间数据的科学和工程分支将受益于正式的

对空间关系的理解。 特别是它对空间逻辑和空间的贡献

空间推理也将有助于测量工程，计算机等领域

辅助设计/计算机辅助制造（CAD / CAM），机器人技术和非常大的 -

规模集成（VLSn设计。

各种空间关系可以分为三类：（I）

拓扑关系在拓扑变换下是不变的

参考对象（Egenhofer 1989，Egenhofer和Herring 1990）;（2）公制关系

距离和方向（Peuquet和Ci-Xiang 1987）; （3）关系

关于空间物体的部分和全部顺序（Kainz 1990），如下所述

介词，如 *前后，上* ， *下* （Freeman 1975，Chang *et al。*

1989年，Hernandez 1991）。 在本文的范围内，只有拓扑空间

讨论了关系。

迄今为止，关系形式主义仅限于一种简单的数据类型 -

尺寸空间，如整数，实数或它们的组合，例如间隔（Allen

1983年。空间数据，如地理对象或CAD / CAM模型，更高

尺寸。 它已被认为在这样一个空间中一组基本关系是

更富有，但到目前为止还没有尝试系统地探索这个假设。

本文的目标是双重的。 首先，要说明拓扑的描述

在点集的拓扑不变性质方面的空间关系是公平的

简单。 因此，两个点集之间的拓扑空间关系可以

用很少的计算量来确定。 第二，表明存在一个

任何拓扑空间关系落入的框架。 这并没有说明这一点

由这种形式主义决定的一系列关系是完整的，即人类可能

区分其他关系，但形式主义提供了完整的报道。

即任何这样的附加关系将只是其中一个关系的专业化

描述。

•

-

作为基础数据模型，选择拓扑空间的子集。 该

点集方法是拓扑表示的最通用模型

空间区域。 使用拓扑空间关系定义的其他方法

不同的模型，如间隔（Pullar和Egenhofer 1988），或单纯复合物

（Egenhofer 1989），通过这种点集方法得到了推广。

本文的结构如下。 下一节将回顾以前的方法

定义拓扑空间关系。 第3节总结了相关的概念

点集拓扑并介绍本文其余部分中使用的概念。

第4节介绍了拓扑空间关系的定义并展示了它们

在 *R Z中* 实现

*•* 第5节研究了两者之间关系的存在

空间区域，拓扑空间的子集，特别适用于地理空间

数据处理。 在第6节中，比较 R·（n~2）和R 1 内的关系 。

2.以前的工作

可以在计算机中找到空间关系的各种术语集合

科学和地理文学（Freeman 1975，Claire和Guptill 1982，Chang *et al。*

|  |
| --- |
| **第4页** |

*拓扑关系*

163

1989年，Molenaar 1989）。 特别是空间查询语言的设计（Frank 1982，

英格拉姆和菲利普斯1987年，史密斯 *等人。* 1987年，Herring *等人。* 1988年，Roussopoulos *等人。*

1988）是用于通过口头解释的空间关系的非正式符号的储存库

用自然语言。 这些术语的一个主要缺点是缺乏正式的

支撑，因为它们的定义经常基于其他表达式

它们没有精确定义，但假设通常被理解。

大多数空间关系的正式定义将它们描述为二元的结果

点集操作。 随后对这些方法的审查将显示它们

优点和不足。 很明显，没有任何前人的研究有

系统地进行了足以被用作证明关系的手段

定义为两者之间的拓扑空间关系提供了完整的覆盖

空间物体。 一些定义仅考虑表示的有限子集

'空间对象'，而其他人使用不充分的概念来定义整个范围

拓扑空间关系。

形式主义使用原始 *距离*和*方向*结合

逻辑连接器 *AND，OR*和*NOT* （Peuquet 1986）将不在此处考虑。 该

假设每个空间都有一个度量标准，显然限制太多了

形式主义不能在纯粹的拓扑环境中应用。

集合运算中关系的定义使用纯集理论来描述

拓扑关系。 例如，以下基于点集的定义具有

根据集合给出了 *相等的，不相等的内部，外部*和*相交*

operations =。 ¢， ！; ;; 和*rv* [Giiting 1988]：

*x* = *y：* = points *（x）* = points *（y）*

*x¢y：=* points *（x）* ¢ points *（y）*

*x* 里面的 *y：* = points *（x）!; ;;* 点 *（y）*

x *y* 外 *：=* points（x）f“\ points *（y）= 0*

*x* 与 *y* 相交 *：* = points（x）f“\ points *（y）* ¢ 0

这些定义的缺点是这组关系既不是正交也不是正交

完成。 例如， *相等*和*内部*都被*交叉*的定义所覆盖*。*

相比之下， *本身* 点集模型不允许ofthose关系的定义

这是基于点集的特定部分的区别，如

边界和内部。 例如，关系 *相交*在拓扑上是不同的

从那里存在共同的边界点，但没有共同的内部点

遇到。

通过考虑 *边界，* 增加了点集方法

和 *内部，*以便*重叠*和*邻居可以*区分（Pullar 1988）：

*x* overlay *y：* = boundary（x）f“\ boundary *（y）* ¢ 0 和

内部（x）f“\ interior *（y）* ¢ 0

x邻居 *y：* = boundary（x）f“\ boundary *（y）* ¢ 0和

interior（x）f“\ interior *（y）* = 0

在更系统的方法中，边界和内部已被确定为

多边形交叉点的重要描述（Wagner 1988）。 通过比较是否

或者没有边界和内部相交，已经确定了四种关系：（I）

|  |
| --- |
| **第5页** |

164

M. J. *Eqenhofer和R.* D. *Franzosa*

边界相交的*邻域* ，但内部没有; （2） *分离*在哪里

边界和内部都没有相交; （3） *严格包含*边界所在

不相交，但内部做; 和（4）与两个边界*相交*和

室内设计相交。 该方法使用单一，连贯的方法进行描述

拓扑空间关系，但它没有实现其所有后果。 对于

例如， *交叉*和*相等* 之间不能区分 *，*因为

bot Ii关系边界和内部相交。

3.点集拓扑

这种拓扑空间关系模型基于点集拓扑

*内部*和*边界的* 概念 *。* 在本节中适当的定义和结果

从点集拓扑中提出。 一些结果是在没有证据的情况下陈述的。

这些证据是定义的所有直接的后果， 可以发现

在大多数基本拓扑学教科书中，例如Munkres（1966）和Spanier（1966）。

设 *X* 为一组。 *X*上的一个*拓扑*是*X*的子集的集合*d*满足

三个条件：（1）空集和 *X*在*d;* （2） *d*在任意下关闭

工会; （3） *d*在有限交叉点下关闭。 *拓扑空间*是一组*X*

*X*上的*X*上的一个拓扑集拓扑 *d*被称为*开集，*和他们

*X*中的补语称为*闭集。* 闭集的集合：（1）包含

空集和 *X;* （2）在任意交叉点下关闭; （3）在有限的情况下关闭

工会。

通过集合 *X* 上的拓扑中的开集 ，接近的集合论概念是

成立。 如果 *U*是一个开集和*xeU，*那么*U*被认为是x的*邻域* ，这个

集合理论的接近概念概括了紧密度量的概念。 公制 *d*

在集合 *X上*引入*X上*的拓扑*，*称为*由d定义*的*度量拓扑。* 这个

*U* c 是这样的拓扑结构 。 如果对于每个*xeU，*有一个*e>* 0 *，*那么*X*是一个开集

围绕x 的半径为 *e的* d球包含在*U中* .d球是距离的一组点

来自度量 *d* 中的x小于s，即*{yeXld（x，y）<e}。*

对于本文的其余部分，让 *X*为具有拓扑*d*的集合*。* 如果 S是*X*的子集

然后S从 *d* 继承拓扑 *。* 这种拓扑称为*子空间拓扑，*并且是

定义为 *U* c。 如果且仅当 *U* = Sn *V* for时，S在子空间拓扑中打开

一些人设定了 *Ved。* 在这种情况下，S被称为*X*的*子空间* *。*

3.1。 *内部*

鉴于Y c。 *X，*由r表示的*Y*的*内部*被定义为所有开放的并集

包含在 *Y* 设置 *，*即彝族的内部包含在Y.最大的开集

*y* 是在Y的内部，当且仅当 *Y中* 包含 *y* 的邻域时 *，* 即

咋 R如果，且仅当有一个开放集合*U，*使得叶 *ü℃。* Y.内部装置可以

是空的，例如空集的内部是空的。 *X* 的内部是*X*本身。 如果 *你*是

然后打开 *U·* = *U.* 如果 Z c。 Y然后是Z· c。 河

*3.2。* *关闭*

*Y* 的 *闭合* *，*由*Y*表示时*，*被定义为所有封闭集合的交集

包含 *Y，*即Y是关闭含有Y.最小闭集由此可见*，y*是

在Yif的封闭中，并且只有 当 *y的*每个邻域与*Y*相交时*，*即如果和*Y，则是* *Y.*

只有 当每个打开的集合*U*包含*y* 时， *Un* Y ~ 0 *。* 空集是唯一的设置

空封闭。 *X* 的关闭是 *X*本身如果C关闭则C = C.1fZ c。 Ythen *Z* c。 *Y.*

|  |
| --- |
| **第6页** |

*拓扑关系*

165

*3.3。* *边界*

由*y*表示的Y 的 *边界*是Y和Y的闭合的交叉点

关闭Y的补集，即 *ay = YI“）X* - *Y.*边界是一个闭集

如果y的每个邻域都相交，则y在Yifand的边界内

*Yand* 它的补充，即 *yeaYif* ，只有当*UI“）* Y＃ 0和*UI”）（X* - Y）＃ 0为

每个开放的集合 *U*包含y。 边界可以是空的，例如两者的边界。

X和空集是空的。

*3.4。* *内部，封闭和边界之间的关系*

内部，封闭和边界的概念是即将到来的基础

讨论集之间的拓扑空间关系。 之间的关系

内部，闭合和边界由以下命题描述：

*命题* 3.1。 *Y “L”）ΔY= 0。*

*证明：* 如果 *xea Y，*那么x的每个邻域*U都*与X相交，而*U*则不能

被包含在 *Y.*由于没有附近*üOFX*载于YIT如下使得*x¢：Y”*和，

因此， *aYI“）* Y”= 0。

0

*命题* 3.2。 Y“ua *Y* = Y.

*证明：Y* “C：YC：Y和，顾名思义， *一个* YC：Y.如Y”和*Ay*为*Y*它的两个子集

遵循（Y“uaY）c： *Y。*为了表明Yc：（Y”uaY），让xef并假设*x¢：Y“。*它

显示 *xea Y* ，因为xe Y，只需要显示xeX - Y. *x¢：* Y“暗示

*x的* 每个邻域都不包含在1中：因此，每个邻域都包含在内

x与X - Y 相交 ，暗示xeX - Y.所以*xeay。* 因此，如果xeY和*x¢：Y“，*那么*xeay，*

然后是Yc：（Y“uaY）。因此Y =（Y”uaY）。

0

*3.5。* *分割*

分离和连通性的概念对于建立分离和连通性至关重要

即将出现的集合之间的拓扑空间关系。 设Yc：X。 Y是一个的 *分离*

X的子集对 *A，B*满足以下三个条件：（1） *A* ＃ 0和*B* ＃ 0;

*（2） AuB = Y;* （3） *AI“）B =* 0 和 *AI”）B =* 0. 如果存在Y的分离，则Yis

据说要 *断开连接，*否则Yissaid会被*连接。* 如果*Y*是两个非的联合

X的空的不相交的开放子集，然后如果C是，那么Yis断开连接

连接和C c：D c：C，然后连接D. 特别是ifC连接，然后是Cis

连接的; 但是，不需要连接*ac*和Co.

*命题* 3.3。 如果*A，B*形成*Y*的分离，如果Z是*Y*的连通子集*，*

然后Z c： *A*或Z c： *B。*

*证明：*通过假设，Z是*A*和*B* *的*并集的子集*，*即Z c：Au *B.* 它是

表明Z与 *A*或*B* 之一的交点是空的，即Z *I“）B* = 0

或者 *ZI“）A* = 0.假设没有，即假设两个交叉点都是非空的。让

*C = ZI“）A*和*D = ZI”）B。* 然后C和D都是非空的并且CuD = Z. 如

*抄送：A，Dc：B，*和*AI“）B = 0* （因为*A，B*是Y的分离），它遵循

CI“）D = 0.类似地， *cl”）15* = 0; 因此，C和D形成Z的分离，

与Z连接的假设相矛盾。 所以 *ZI“）B* = 0或*ZI”）A* = 0，

暗示Z c： *A*或Z c： *B。*

0

|  |
| --- |
| **第7页** |

166

M. J. *Egenhofer和R. D. Franzosa*

如果*X* - Z断开，则称*X* 的子集Z将 *X* *分开* 。 下列

分离结果给出了 *X* 子集边界的简单条件

分开 *X.*

*命题* 3.4。 假设Yc：X。 如果 YO~0 和 Y~X， 则yo和 *X* - Y形成a

分离 *X-0Y，*因此*OY*分离*X.*

*证明：* 假设，哟和 *X* - Y 是非空的。 显然，它们是不相交的

开放集。 命题3.2暗示 *X -oY =* YOv（X- Y）。 它遵循哟和

*X* - 形成 *X* -oy的分离 *。*

0

*3.6。* *拓扑等价*

拓扑等价的研究是拓扑理论的核心。 二

拓扑空间在 *拓扑上是等价的（同胚*或*相同的拓扑*

*型* *），*如果有他们之间的双射函数得到双射

相应拓扑中的开放集之间的对应关系。 这样 的功能，

这是用连续逆连续的， *被*称为*同胚。* 示例

同胚是转换，旋转，缩放和倾斜的欧几里德概念。

调用在同胚下保留的拓扑空间的属性

*空间的拓扑不变量* 。 例如，连通性的属性是a

拓扑不变量。

4.用于描述拓扑空间相关性的框架

该模型描述了两个子集 *A*和*A* 之间的拓扑空间关系

*.B，* 拓扑空间 *X* 是基于对四个交叉点的考虑

两组 *A*和*B的* 边界和内部 *，*即*iJAnoB，AOnB“，iJAnBo*和

*AOnoB。*

*。*

*定义* 4.1。 设 *A，B* 为拓扑空间 *X的* 一对子集 *。* 拓扑

*A*和*B* 之间 *的* 空间关系由拓扑的四元组值描述

与 *aAniJB，AOnBo，oAnBo*和*AOniJB* 四个集合中的每一个相关联的不变量 *，*

分别。

。 在同胚下保留了两组之间的拓扑空间关系

底层空间 *X.*具体来说， *iff： X* - Y是同胚， *A，BcX，*

那么 *oAnoB，AOnB“，iJAnBo*和*AOniJB*被同胚映射到

*iJf（A）niJf（B），f（Atnf（Bt，iJf（A）nf（Bt，* 和 *f（A）OniJf（B））* 。

拓扑空间关系是根据拓扑不变量来定义的

交叉点，它遵循 *X中* *A*和*B* 之间的拓扑空间关系

与 Y中 *f（A）*和*f（B）* 之间的拓扑空间关系相同 。

拓扑空间关系在这里用四元组L表示， 〜 - > \_）。 该

条目对应于与四个相关联的拓扑不变量的值

设置交叉。 第一个交叉点称为 *边界 -*交叉点，

第二个交叉口是 *内部 - 内部*交叉口，第三个交叉口

*边界 - 内部* 交叉点，第四个交叉点是 *内部边界*

路口。

*4.1。* *来自空/非空集交叉的拓扑空间关系*

作为四元组中的条目，属于不变的集合的属性

同胚被认为是。 例如，属性为 *空*且*非空*

|  |
| --- |
| **第8页** |

*拓扑关系*

167

是集合论的，因此在拓扑上是不变的。 其他不变量，不是

在本文中，侧面是一组的维度和连接的数量

组件（Munkres 1966）。 空/非空是最简单和最通用的

不变量，以便任何其他不变量可被视为更严格的分类器。

对于本文的其余部分，注意力仅限于二元拓扑

通过分配 *空* （0）和*非空* 的适当值来定义空间关系

（10） 四元组中的条目。 这些组合的16种可能性是

表 1 总结 。

集合为空或非空; 因此，很明显这16个拓扑

空间关系提供完全覆盖，即给定 X中的任何一对 *A*和*B* ，

总是存在与 *A*和*B* 相关的拓扑空间关系

set不能同时为空和非空，从16开始

拓扑空间关系是互斥的，即对于 X中的任何一对 *A*和*B* ，

16个拓扑空间关系中恰好有一个成立。

通常，16个空间关系中的每一个可以在两组之间发生。 根据

关于集合和底层拓扑空间的各种限制，实际集合

现有拓扑空间关系可以是表 1中 16的子集 。对于一般情况

平面 *R 2* 中的点集

*，* 所有16个拓扑空间关系都可以实现（图1）。

*4.2。* *拓扑空间*对*关系的影响*

设置，即 *A*和*B*所在的拓扑空间X ，起着重要的作用

在 *A*和*B* 之间的空间关系中 *。*例如，在图2 （左图）中，两组

*A*和*B*具有关系（0，.0，.0，.0）作为该行的子集。 相同

配置显示嵌入时两组之间的不同关系

在飞机上（图2，右图）。 平面的子集， *A*和Bare 的边界

分别等于 *A*和*B，*内部为空，即*oA = A，AO* = 0， *oB = B，*

和 *B O* = 0，由此可见，在平面中的两个集合*A*和*B*之间的空间关系

是 （I e ，0,0,0）·

表 1.基于空白和标准的二元拓扑关系的16个规范

边界和内部的非空交叉点。

*咏叹调*

°RL°

*阿罗*

*°RLO*

RO

0

0

0

0

R，

，0

0

0

0

R，

0

，0

0

0

R，

，0

，0

0

0

河

0

0

，0

0

R，

，0

0

，0

0

河

0

，0

“0

0

（7

，0

，0

0.0

0

（8

0

0

0

，0

*RG*

，0

0

0

，0

（ .. 0

，0

0

“0

（”

，0

，0

0

0.0

R 12

0

0

，0

“0

（13

，0

0

0.0

，0

*[R ,.*

0

，0

，0

“0

（”

，0

，0

0.0

，0

|  |
| --- |
| **第9页** |

168

M. *J. Eqenhofer和R.* D. *Franzosa*

RO

河

R2

[R

Ĵ

® ~~ R'）

Ë

A- <2> e-〜

A- （2） e- ~ A- ;;;。

e-“ -

A- （2） B-〜

R4

RS

R6

R7

〜 • - -

A-- a- ~ A- -

E-〜

A- 〜e-~

A- 0 e-~

RA

r g

RIO

我•

〜 • - -

A- <2> **e--** A- 0 e--

A- 〜e-~

A- （2） e- 〜

RL2

[R

我J.

R.4

RLS

~~

- •

A- <2> 1 E--〜A- FR” E：.f5）A - @ E-〜A-（2）E-〜

图 1.基于比较的16个二元拓扑空间关系的例子

边界和内部之间的空和非空集合交叉。

图2.两组 *A*和*B* 的相同配置 （左侧面板）拓扑空间

嵌入一​​行中的关系 （0.10.10.10）和（右面板） （I 0.0.0.0）中的一个

平面。

|  |
| --- |
| **第10页** |

*拓扑关系*

169

5.空间区域之间的拓扑关系

本文的目的是模拟两者之间发生的拓扑空间关系

飞机上的多边形区域; 因此，拓扑空间 *X*和下面的集合

*X*中的考虑受到限制。 这些限制不是太具体而且是唯一的

关于拓扑空间 *X的* 假设是它是连接的。 这个

保证每组利益的边界不为空。

感兴趣的集合是 *空间区域，*定义如下：

*定义* 5.1。 设 *X* 是一个连通的拓扑空间。 *X* 中的 空间区域 是a

满足（1） AD的*X的* 非空的适当子集 *A*被连接并且（2） *A = A D.*

*•*

从定义可以得出，每个空间区域的内部都是非空的。

此外，空间区域是闭合的并且因为它是连接的闭合而连接

组。 图3描绘了平面中的集合，其不满足条件（1）或

定义5.1中的条件（2）不是空间区域。 *A*和*B*不是空间区域，

因为 AD和*B D.*

没有分别连接。 C和 D不是空间区域，

因为它们不满足条件（2），即 C~CO和D~DD。 后者是

实现拓扑空间关系中的*R* 2'的平面*R* 5' *R* *S-，R* 9' *，R“2*和*R* 13 需要的 。

以下命题暗示每个空间区域的边界是非

空。

*命题* 5.2。 如果 *A* 是 *X中* 的空间区域， 那么 *oA* ~ 0。

*证明：AD* *0〜A* = -4 因为 *A* 是封闭的，和 *A〜X* 的定义OFA空间区域。

从命题3.4可以得出， AD和*X-A*形成*X-aA*的分离*。* 如果

*aA* = 0 然后两组形成 *X* 的分离 *，* 这是不可能的，因为 *X* 是

连接的; 因此， *oA* ~ 0。

0

*5.1。* *区域关系的存在*

点集之间空间关系的框架延伸到空间

但是，区域之间并不存在任意点集之间的所有16个关系

两个空间区域。 从图I中的例子可以得出结论，至少是

关系 *ro，r“r 3，* *r6'r* *”r，o，r l1， r，...*和*r'5*存在于两个空间区域之间。 该

以下命题表明这九个拓扑空间关系是唯一的

空间区域之间可能发生的关系。

*命题* 5.3。 对于两个空间区域，空间关系 *r2'r ..，r5，* 's， *r9'r12*

并且 *r'3*不会发生。

*证明：* 首先证明如果边界内部或内部 -

边界交叉点是非空的，然后是内部 - 内部交叉点

同样的两个地区也是非空的。 这意味着六个拓扑空间

关系 *R.，，R5，RS，R9' R12*和*RL3'* 所有空内饰，内部和非空

边界内部或内部边界交叉点，不会发生。

〜 -

（一个）

（B）

（C）

（0）

图中是Dotspatial地区飞机3 集 。

|  |
| --- |
| **第11页** |

170

M. *J. Eqenhofer和 R. D. Franzosa*

让 *A*和*B*是用于其中*CANSO*升的空间区域” 0 结果表明*，AO* NS” L” 0。

使用命题3.2， *AOuiJA = A*和*AOuiJ（AO）= Ao。* *A = A = Ao，*所以*AOuiJA*

*= AOUIJ（AO）。* 此外，通过命题3.1， *AOniJ {AO）= 0* 并且 *AOniJA = 0。* 它

遵循 *iJ {AO）= iJA。* 现在让*xeiJAnS“，*然后xeiJ {AO~和S以来”是开放的

包含 *x，*它遵循*A* ° *nBo l'* 0。因此，如果边界 - 内部交叉点是

非空，那么内部 - 内部交叉也是非空的。 它也如下

如果内部边界交叉点非空。 然后内部 - 内部

十字路口也是非空的。

接下来证明，如果边界 - 边界交叉点是空的，那么

内部 - 内部交叉点非空，然后是边界内部或内部

内部 - 边界交叉点是非空的。 这意味着空间关系 '2'

有一个非空的内部 - 内部交叉点和空的交叉点为边界 -

边界，边界内部和内部边界，不会发生。这将完成

命题的证明'。

让 *A*和*B*是空间区域，使得*iJAniJB =* 0和*AOnBo* L” 0结果表明

如果 *iJAnBO =* 0，则*AOniJB1'* 0。假定*iJAnBo* = 0。由于*B = BouiJB。* 它

followsthat *iJAnB =* 0，因此*，BEX -iJA。* 命题3.4表示*AO*和

*X-A* 形成 *X-iJA* 的分离 *，* 并且由于 *B* 连接，命题3.3意味着

无论是 *BeAo*还是*BeX -A。* 因为，假设*AOnB°1'0，*则遵循这一点

*BeAo* ，因此， *iJBeAo。* 显然*，iJBnAO* L” 0，结果如下。

0

*5.2。* *关注的语义，兴趣*

在图1中，示例描述了拓扑空间关系 '0> ' 1''3''6 '

'“” 0''11''14和“，在空间区域之间。这九个关系中的每一个都是

在下面的定义中考虑并且使用它们来研究它们的语义

Egenhofer（1989）和Egenhofer and Herring（1990）中的符号。

*定义* 5.4。 九个拓扑空间关系的描述性术语

两个地区之间的情况见表2。

如果 *A*和*B* 之间的拓扑空间关系是'0那么，在集合论中

感觉， *A*和*B*是不相交的，因此，拓扑空间关系是*不相交的*

与不相交的集合论概念相吻合。 以下命题和

推论证明了拓扑空间关系的其他描述性术语

表2中定义。

表2.用于两个空间区域之间的九个关系的Tenninology。

*af'la*

0f'l0

*af'l°*

*°f'la*

“0

（0。

0。

0。

0）

*A* 和 *B* 是不相交的

*[R*

（10，

0，

0，

0）

*A* 和 *B* 触摸

“3

（10。

10。

0。

0）

*A* 等于 *B.*

“6

（0。

10，

“0，

0）

*A* 在 *B* 或 *B的* 内部 包含 *A.*

*[R*

（10。

“0。

10。

0升

*A* 由 *B* 或 *B* 覆盖 *A.*

“0

（0，

10。

0，

10）

*A* 包含 *B* 或 *B* 在 *A内*

“”

（10，

10。

0。

10）

*A* 覆盖 *B* 或 *B* 由 *A* 覆盖

“4 （0，

10，

“0，

10）

*A* 和 *B* 与不相交的边界重叠

' .. （10。

10。

“0，

-'0）

*A* 和 *B* 与交叉边界重叠

|  |
| --- |
| **第12页** |

*拓扑关系*

171

*命题* 5.5。 设 *A* 和 *B*为*X中的* 空间区域 *。* 如果 *AOnB°; lo0* 和

*AOnaB = 0，* 然后是 *AOcBO* 和 *AcB。*

*证明：AO* 已连接。 命题3.4意味着 *B“* 和 *X-B* 形成一个

*X* 的分离由于*AOnaB* = 0时，它遵循由命题3.1该*AO* C B的*“u（X-B）。*

命题3.3意味着 *AOcB“*或*AOc（XB）。*但是*AOnB”; Io* 0; 因此，

*AOcBO。* 由于 *AOcB“，* 它遵循 *AOcB”* ，根据定义5.1，它意味着

*ACR*

0

从命题5.5开始，如果A.由 *B* 覆盖 *，*则*A* c *B;* 因此，

空间关系 *是通过*用的是子集的集合论概念一致*覆盖* 。

命题5.5的以下推论表明空间关系 *相等*

对应于平等的集合论概念。

*推论* 5.6。 设 *A* 和 *B* 为空间区域。 如果 *A* 和 *A* 之间 *的* 空间关系

*B* 是r J， 然后 *A = B.*

*证明：A* °nB°; lo 0 和 *AOnaB* = 0; 因此，命题5.5意味着 *A* c R

此外， *aAnBo = 0。* 再次提出命题5.5， *BcA。* 因此*A = B.*

0

命题5.5的以下推论表明，如果 *A*在*B内，*那么*A* c *BO;*

因此， *内部* 的空间关系与存在的拓扑概念一致

包含在内部。 相反， *contains*对应于内部包含。

*推论* 5.7。 设 *A* 和 *B* 为空间区域。 如果 *A* 和 *A* 之间 *的* 空间关系

*B* 是 *r6'* 然后是 *AcBO。*

*证明：* 命题5.5意味着 *AO* c *BO* 和 *A* c R 通过命题3.2，

*A = AouaA* 和 *B = BOuaR* 所以 *aAcR* 由于 *aAnaB = 0，* 因此 *aAcBo* 如下 *。*

与 *AOcB* 一起 *“*这意味着*AcBo。*

0

6. **在** n维空间关系

很自然地会问'对拓扑空间 *X*和集合有什么进一步的限制

在 *X中* 考虑进一步减少了可以的拓扑空间关系

发生？' 本节将通过考虑 *X*是a 的情况来探讨这个问题

欧几里德空间。

*R“*表示具有通常的欧几里德度量的n维欧几里德空间

如果存在对的距离的上限，则 *R“的* 子集是*有界*的

集合中的点数; 否则，据说是 *无限的。*

*R* 中的 *单元盘* *“*是该组中的*R*点的*”，*其距离原点是少

大于或等于，作为*R* 1， *单元球* *“*是该组中的*R*点的*”*从其距离

原点等于1.对于 *n; ::* 1， *R“中*的单位磁盘连接。对于*n; ::* 2单位

球在 *R”*连接。设*X*是拓扑空间。 *一个n磁盘*中*X*是的子空间

*X* 是同胚于在 *R”* 单位圆盘 *。* *一个 n球* 在 *X* 为 *X* 的子空间

同胚于 *R* 中的单位球面 *“+* 1中的*R*正磁盘*”*是有界的，并且空间

区域; 后者是布劳威尔定理的相对直接的结果

关于域的不变性（Spanier 1966）。由于 *R“*中的n个磁盘是空间区域，

命题5.3限制了它们之间可能发生的空间关系的数量。

|  |
| --- |
| **第13页** |

172

*MJ Eqenhofer和R. D. Franzosa*

在命题6.1中，表明如果 *A*和*B*是Rn中的n个盘，其中n;？:: 2，那么“

不能发生*与不相交边界的*空间关系*重叠*。证明这一点

命题基于以下两个事实：

*事实* 1.设 *A*是 *R“中* 的n盘，其中 *n;？:: 2.*然后 *oA*是 *R中* 的（nI） - 球，并且，

因此，连接。

这个事实也是Brouwer定理关于域不变性的结果

（Spanier 1966）。

*事实* 2.设 *A*是 *R“中* 的n盘，其中 *n;？:: 2.*然后 *Rn-Ao*连接并且

无界。

第二个事实是与Jordan-Brouwer相关的（非）分离定理

分离定理（Spanier 1966）。

*命题* 6.1。拓扑空间关系r l4，

与不相交的重叠

在 *R“*与*n;？:: 2的* n个磁盘之间不会出现边界*。*

*证明：* 假设 *A“*和Bben-磁盘在 *R”中* 带有n;？:: *2.1t*，*ifoAf“loB =*0， 那么

*A*和 *B*不重叠，因此，空间关系 *与不相交重叠*

*边界* 不可能发生。

假设 *oAf“loB =* 0且*A*和*B*重叠。将导出矛盾*.B*是a

空间区域; 因此，命题3.4意味着 *B“*和*R”* - *B*形成分离

的 *R “-OB。*作为*OAF” LOB = 0*它遵循*OACR“-OB。*通过事实1，*OA*被连接，

因此，命题3.3意味着 *oA cB“*或*oA c（R”-B）。*自*A*和*B*

重叠，它遵循 *oAf“lBo* i” 0，因此，*oA* c *BO。*

*oAcBo*暗示 *oAf“l（R”-BO）= 0。* 事实上， 2，*Rn\_Bo*已连接。 运用

命题3.3和3.4并且如上所述，它遵循 *（R“-B”）cAO*或

*（Rn-B“）c（Rn-A）。* 第一种情况产生矛盾，因为事实2， *Rn\_Bo*

是无限的，但 *AO*不是。第二种情况意味着*A* c *BO*，因此，

*A°f“loB =*0， 这与 *A*和 *B*重叠的假设相矛盾。因此，在

在任何一种情况下都获得了矛盾，并且随之而来的是空间关系r 14不能

在 *R“*与n;？:: 2的n个磁盘之间发生。

0

“注意，对于n;？:: 2，拓扑空间关系r 15' *与交叉重叠*

*边界* 确实发生在两个n盘之间（图1）。

相反的情况发生在R I中，其中*r l 4*可以在l盘之间发生，而r I 5，

*与交叉边界重叠，* 不能。很明显，r 14 可以发生在两者之间

*R I中的* I盘（图2）。命题6.2表明r I 5不会发生。它的证明需要

在容易导出事实中的R的空间区域 我可以是一个闭区间*[A，B]*为

一些 *一个，BER* 1，或封闭的射线*并[a，* CO）或（ - CO，*A]*对于一些*AER* 1

•

*命题* 6.2。拓扑空间关系 *r*15 之间不会发生

*R* 1中的空间区域。

“0

*证明：* 设 *A*和 *B*为 *R*I中的 空间区域，并假设 *A*和Boverlap。 它是

表明 *OAF“LOB* = 0中的每一个*甲*和*乙*是一个封闭的间隔或闭合射线;因此，

有九种不同的案例需要审查。一个被选中; 其他人可以证明

“因此。

假设 *A* = *[a，* co），*B =（* - *co，b]。*然后*oA* = *{a}*和*oB = {b}。*由于*A*和*B*

重叠，它遵循 *a* < *b，*这意味着*oAf“loB* = 0。

0

|  |
| --- |
| **第14页** |

*拓扑关系*

173

7.结论

已经提出了拓扑空间关系定义的框架

基于纯粹的拓扑属性，因此独立于a的存在

距离函数。拓扑关系由四个交叉点描述

两个点集的边界和内部。考虑二进制值为空

对于这些交叉点而言，非空，一组16个相互排斥的规范

已被确定。如果对点集和对象的特殊限制，则存在较少的关系

拓扑空间。事实证明，只有九个拓扑空间

与平面中的多边形区域同胚的点集之间的关系。

虽然这项工作的性质相当理论，但该框架有一个

立即影响地理信息的设计和实施

系统。 以前，对于每个拓扑空间关系，必须有一个单独的程序

编程，没有机制来确保完整性。现在，拓扑

空间关系可以从单一，一致的模型中导出，而不是编程

个人关系是必要的。该框架的原型实现

已被设计和部分实施（Egenhofer 1989），以及各种各样的

已经调查了框架的扩展以提供有关的更多细节

拓扑空间关系，如考虑维度

交叉点和交叉点中断开的子集的数量（Egenhofer

和Herring 1990）。正在进行的调查集中在这个框架的应用上

关于拓扑空间关系组合的形式推理。

提出的框架被认为是一个开始，并进一步调查

必须验证其适用性。这里，只有拓扑空间关系与co-

考虑尺寸零，即空间尺寸之间的差异

并且嵌入的空间对象的尺寸是零，例如在

一维线上的平面和间隔，也是GIS应用的关注点

是共同维度大于零的拓扑空间关系，例如

在飞机的两条线之间（Herring 1991）。同样，这适用于此

不同维度对象之间拓扑空间关系的框架，

如区域和线，必须进行测试。

致谢

Bruce Palmer给出了这项工作的动力。在许多讨论中

与 John Herring一起，澄清了这些概念。安德鲁弗兰克和雷纳托

Barrera对本文的早期版本发表了宝贵的评论。 这项工作是

部分资金来自NSF根据第1ST 86-09123号数字设备提供的资助

公司根据第414号赞助研究协议和TP-765536，Inter-

图表公司和联合统计协议下的人口普查局

不， 89〜23。NSF为NCGIA提供的额外支持，授权号为SES 88-

感谢10917。

参考

ABLER， R.， 1987，国家科学基金会国家地理信息中心

和分析。 *国际地理信息系统期刊，* I， 303-326。

ALLEN， J. F.，1983年，大约维持时间间隔的知识。*通讯*

*ACM*，26,832-843。

常， S. K.， JUNGERT，E.， 和 LI， Y〜1989，图形数据库的基于所述的设计

符号预测理论。在： *设计和研讨会论文集*

*举办大型空间数据库的实现* 在 *加利福尼亚州圣巴巴拉，* 由编辑

A. Buchmann，O。Giinthet，T。Smith和Y. Wang（纽约：Springer-Verlag），

*讲义* 在 *计算机科学，* 卷。409，pp.303-323。

CLAIRE， R~ 和GUPTILL， S~ 1982，选定 数据 结构的 空间运算符.In ：*Proceedings*

*Auto-Carto V.* 在 *弗吉尼亚州水晶城* *举行，*第189-200页。

|  |
| --- |
| **第15页** |

174

*拓扑关系*

EGENHOFER，M.，1989，二元拓扑关系的正式定义。在： *第三*

*lmemational Confereru：e* on *FourrdDtions ofData Organization and Algorithms（FODO），*

在*法国巴黎举行;*由W.Litwin和H.-J。编辑。Schek（纽约：Springer-Verlag），

*讲义*在*计算机科学，*卷。367，第441-472页。

EGENHoFER， M~和HERRING，J.，1990，一个数学框架的定义

拓扑关系。在： 关于*Spotial 的第四届国际DI 研讨会论文集*

*数据处理*在*瑞士苏黎世举行，*由K. Brassel和H. Kishimoto编辑，

第803-813页。

FRANK， 〜 1982年，地图查询 - 电子数据库查询语言。用于检索几何数据及其

图示。 *ACM Computer Graphics*，16,199-201。

FREEMAN，J.，1915，空间关系的建模。 *计算机图形和图像处理，*

4,156-111。

GOTiNG。R.，1988，Gee-relational algebra：几何数据库的模型和查询语言

系统。 在： *国际会议*上*举行扩展数据库技术*在*威尼斯，*

*意大利，*由J. Schmidt，S。Ceri和M. Missikolf编辑（纽约：Springer-Verlag），*讲座*

*注意*在*计算机科学，*卷。303，pp.506-521。

HERNANDEZ，D.，1991，空间知识的相对表示：二维案例。在： *认知*

*和地理空间的语言学方面，*由D. Mark和A. Frank编辑（Dordrecht：

Kluwer Academic）（印刷中），

HERRING， J~ 1991，中国空间和非空间信息的数学建模

地理信息系统。在： *地理空间的认知和语言方面，*

D. Mark和A. Frank（Dordrecht：Kluwer Academic）编辑（正在印刷中）。

HERRING，J.，LARSEN， R~和SHiVAKUMAR，J~ 1988，扩展到SQL语言以支持

拓扑数据库中的空间分析。在： 在*圣路易斯举行的GIS / LIS'SS的会议录*

*安东尼奥，德克萨斯州，* pp.741-15O。

HERSKOVlTS，A.，1986， *语言和Spatwl认知 - 跨学科的研究*

*介词*用*英语*（剑桥：剑桥大学出版社）。

INGRAM， K~和PHILUI'S，W.， 1981，'使用基于SQL的地理信息处理

查询语言。在： *诉讼ofAUTO-CARTO S，第八InternationDISymposium*上

*计算机辅助制图在马里兰州巴尔的摩举行，*由NR Chrisman编辑，

pp.326-335。

KAINZ， W.， 1990，空间关系 - 拓扑与秩序。在：*第四届会议录*

*InternationDISymposium*对*空间数据处理在瑞士苏黎世举行，*由K.编辑

Brassel和H. Kishimoto，pp.814-819。

MOlENAAR，M.，1989，单值向量图 - 地理信息系统中的一个概念。

*地理lrformauonssysteme.L; 18-26。*

MUNKRES，J.，1966， *Elemenatary Differential Topology*（普林斯顿，新泽西州：普林斯顿大学

按）。

国家地理信息和分析中心（NCGIA），1989年，研究

国家地理信息和分析中心的计划。 *国际*

*地理信息系统杂志*，3,117-136。

PEUQUET，D.，1986，空间的使用。帮助空间数据库检索的关系。 在：

*诉讼ofSecond国际研讨会*上*的空间数据处理保持* 在 *西雅图，*

*WA*，D。Marble编辑，第459-411页。

PEUQUET，D。和CI-XIANG，Z，1981，一种确定方向关系的算法

在平面中任意形状的多边形之间。 *Pauern Recognition*，20,65-14。

PULLAR，D.，1988，空间数据模型的数据定义和算子。在： *会议记录*

*ACSM-ASPRS年会*在*密苏里州圣路易斯举行，*第191-202页。

PULLAR，D。和EGENHOFER，M.，1988，迈向拓扑关系的正式定义

在空间物体中。在： *第三次国际研讨会论文集*上*Spatwl数据*

在*悉尼举行的处理，Australi4，*由D. Marble编辑，第225-242页。

Roussosoutos，N.，FALOUTSOS， C~和SaLIS，T.，1988，一个高效的图像数据库系统

PSQL。 *IEEE交易*在*软件工程，* 14，63（） - {）38。

SMITH，T.，PEUQUET， D~ MENON，S。和AGRAWAL，P.，1981，KBGIS-II：基于知识的

地理信息系统。 *国际地理信息杂志*

*系统*，1,149-112。

SPANIER，E.，1966， *Algebraic Topology*（纽约：McGraw-Hili）。

TALMY，L.，1983，语言如何构建空间。在： *空间定位：理论，研究和*

*申请，*由H. Pick和L. Acredolo编辑（纽约：Plenum出版社），第225-282页。

WAGNER， D~ 1988，一种评估多边形叠加算法的方法。在：*会议记录*

*ACSM-ASPRS年会*在*密苏里州圣路易斯举行。*pp.113-183。